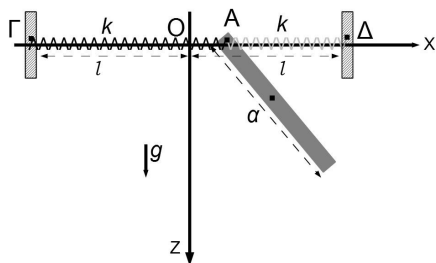


1. α) Έστω $L = L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t)$ η συνάρτηση Lagrange ενός συστήματος. Δείξτε ότι, αν η γενικευμένη συντεταγμένη q_k είναι *αγνοήσιμη*, τότε η συζυγής ορμή p_k είναι ολοκλήρωμα της κίνησης.

β) Δίνεται η συνάρτηση Lagrange $L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{k}{\sqrt{(x^2 + y^2)}} - (x^2 + y^2)^{-3/2}$ (όπου k σταθερά). Δείξτε ότι το μέτρο της στροφορμής του υλικού σημείου (μάζας $m=1$) ως προς την αρχή του συστήματος συντεταγμένων (Oxy) , $l = r^2 \dot{\theta}$, είναι ολοκλήρωμα της κίνησης, όπου (r, θ) οι συνήθεις πολικές συντεταγμένες.

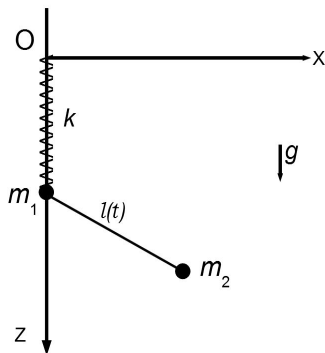
2. Ο πίνακας του τανυστή αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας O στερεού σώματος, μάζας $m=1$, εκπεφρασμένος στο καρτεσιανό σύστημα $Oxyz$ που είναι σταθερά συνδεδεμένο με το στερεό σώμα, έχει στοιχεία $J_{11}=4$, $J_{22}=4$, $J_{33}=8$, $J_{12}=-3$, $J_{13}=0$, $J_{23}=0$. Να βρεθεί η έκφρασή του στο σύστημα των *κυρίων αξόνων* του στερεού.

3. Η ομογενής στερεά ράβδος μήκους a και μάζας m κινείται στο κατακόρυφο επίπεδο Oxz , υπό την επίδραση του ομογενούς πεδίου βαρύτητας, έτσι ώστε το άκρο της A να κινείται κατά μήκος του άξονα Ox . Το A είναι συνδεδεμένο με δύο ελατήρια, φυσικού μήκους l και σταθεράς k . Τα άκρα των δύο ελατηρίων, Γ και Δ αντίστοιχα, είναι ακλόνητα και η απόσταση $\Gamma\Delta$ είναι ίση με $2l$. Να βρεθούν:



- α) οι εξισώσεις Lagrange
β) τα σημεία ισορροπίας
γ) η συνάρτηση Hamilton του συστήματος

4. Η μάζα m_1 του σχήματος είναι υποχρεωμένη να κινείται πάνω στον κατακόρυφο άξονα Oz και η m_2 στο κατακόρυφο επίπεδο xOz . Η m_1 συνδέεται με ελατήριο σταθεράς k και φυσικού μήκους l_0 , το ένα άκρο του οποίου είναι ακλόνητα συνδεδεμένο στην αρχή των αξόνων O . Η m_2 βρίσκεται στο άκρο απλού εκκρεμούς, το μήκος l του οποίου μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση $l(t)=at$, όπου $a>0$ σταθερά. Η κίνηση γίνεται υπό την επίδραση ομογενούς πεδίου βαρύτητας. Να υπολογίσετε:



- α) τους βαθμούς ελευθερίας και τους δεσμούς της κίνησής του
β) τη συνάρτηση Lagrange
γ) τις διαφορικές εξισώσεις και τα ολοκληρώματα της κίνησης

- Δίνονται: $T = \frac{1}{2} m v_0^2 + \vec{v}_0 \cdot (\vec{\omega} \times m \vec{r}_K) + \frac{1}{2} J \omega^2$, $J = J_K + m \delta^2$

- Ροπή αδράνειας ομογενούς ράβδου μάζας m και μήκους l , ως προς το άκρο: $J = ml^2/3$
- Τα θέματα 1 και 2 δίνουν από **2 μονάδες**, ενώ τα θέματα 3 και 4 από **3 μονάδες**.